UNIVERSIDAD DE
Belgrano
BUENOS AIRES - ARGENTINA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Matemática

Parte A: Revisión de conceptos
Parte B: Vectores y Matrices- Sistemas de ecuaciones e inecuaciones- Elementos de geometría analítica

0 03937

Profesora:
Silvia Mamone

UNIVERSIDAD DE BELGRANO

- ***FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS***

PARTE A: Revisión de conceptos
PARTE B: Vectores y Matrices-Sistemas de ecuaciones e inecuaciones- Elementos de geometría analítica

RECOPILACION
PROF. SILVIA MAMONE
ING. DANIELA RAFFO
FEBRERO 2012

- ***<u>PARTE A : Revisión Teórica</u>***

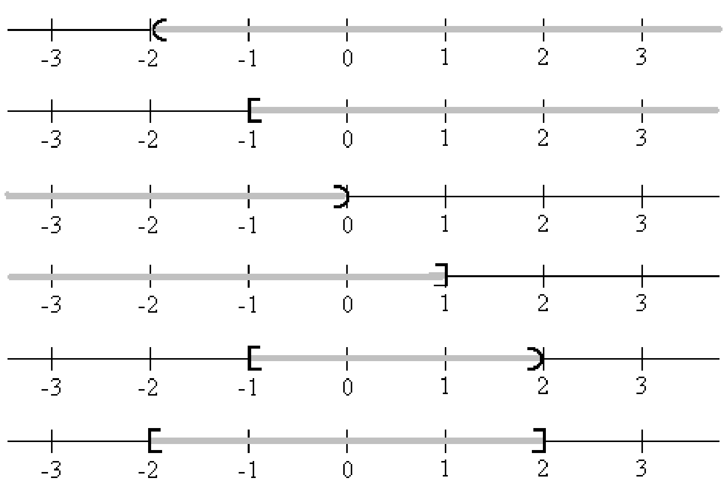
- ***Intervalos, Desigualdades y Valor Absoluto***

1. Intervalos

Consideramos sobre la recta de números reales los siguientes con conjuntos:

1) *Todos los reales mayores que -2*
2) *Todos los reales mayores o iguales a -1*
3) *Todos los reales menores que 0*
4) *Todos los reales menores o iguales que 1*
5) *Todos los reales mayores o iguales que -1 y menores que 2*
6) *Todos los reales entre -2 y 2 (ambos extremos incluidos)*

Estos conjuntos pueden graficarse de la siguiente manera:



A este tipos de conjuntos se los denomina intervalos. Cada extremo de un intervalo puede ser finito o infinito. Si es finito puede ser abierto o cerrado (según si incluye o no el extremo).

En notación matemática los ejemplos anteriores se pueden reescribir así:

1) $(-2,\infty)$ *(finito y abierto a izquierda, infinito a derecha)*
2) $[-1,\infty)$ *(finito y cerrado a izquierda, infinito a derecha)*
3) $(-\infty,0)$ *(infinito a izquierda, finito y abierto a derecha)*
4) $(-\infty,1]$ *(infinito a izquierda, finito y cerrado a derecha)*

5) $\left[-1,2\right)$ (finito y cerrado a izquierda, finito y abierto a derecha)
6) $\left[-2,2\right]$ (finito y cerrado a izquierda y derecha)

Podemos operar con intervalos (así como se puede operar con cualquier conjunto) utilizando por ejemplo la intersección, la unión y el complemento. El resultado es siempre un conjunto y según el caso será a su vez un intervalo o no:

Ejemplos:

$\left[-1,2\right)\cap\left(0,3\right]=\left(0,2\right)$ (resultado es intervalo)

$\left[-4,4\right)\cap\left(2,6\right]=\left[-4,6\right]$ (resultado es intervalo)

$\left(-3,0\right)\cup\left(2,5\right)=\left\{x\in R/\left(x>-3\wedge x<0\right)\vee\left(x>2\wedge x<5\right)\right\}$ (resultado no es intervalo)

$\left(-\infty,5\right]\cap\left(2,\infty\right)=\left(2,5\right]$ (resultado es intervalo)

$\left[-2,2\right]-\left(0,1\right]=\left\{x\in R/\left(x\geq -2\wedge x\leq 0\right)\vee\left(x>1\wedge x\leq 1\right)\right\}$ (resultado no es intervalo)

2. Desigualdades

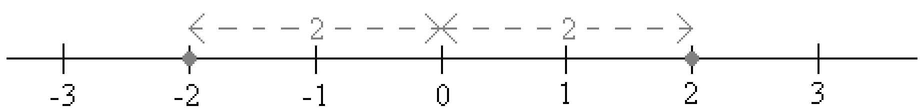
Una desigualdad (o inecuación) lineal es una expresión de la forma

3. Valor Absoluto

El valor absoluto de un número real es la distancia entre ese número y el cero en la recta numérica. Esto significa que | a | =| -a |. Usamos este argumento para resolver ecuaciones con valor absoluto.

Por ejemplo, si $\left|x\right|=3$, entonces x = 3 ó x = -3. Por lo tanto, la solución de la ecuación $\left|x\right|=3$ es -3 y 3.

¿Qué significa por ejemplo | x | < 2? Significa que x es un número menor que 2 unidades desde cero a la recta numérica. La recta numérica nos ayuda a visualizar la situación:



Analicemos ahora la siguiente ecuación:

$$x=\sqrt{4}$$

La solución debe satisfacer

$$x\in R/x^{2}=4$$

Hay dos números que satisfacen esta igualdad: x=2 y $x=-2$, o expresado usando valor absoluto, $\left|x\right|=2$.

- ***Operaciones aritméticas***

Los números reales tienen las siguientes propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} a+b=b+a, a\cdot b=b\cdot a \\ (a+b)+c+c=a+(b+c),(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \end{array}}$$

(Ley Conmutativa)
(Ley Asociativa)
(Ley Distributiva)

En particular, para $a=-1$ *en la Ley Distributiva, se tiene:*

$$\boxed{-(b+c)=-b-c}$$

Si aplicamos la Ley Distributiva a la expresión

$$\boxed{(a+b)(a+b)}$$

Se llega a la siguiente igualdad:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Y en forma análoga:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

- ***Fracciones***

Usando las Leyes Distributiva y Conmutativa se puede llegar a las siguientes formulas de adición y multiplicación de fracciones:

$$\boxed{\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

y, en particular:

$$\boxed{\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}}$$

y

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$$

- ***Factorizacion***

Usando la Ley Distributiva en un sentido o en otro se puede expandir y factorizar expresiones, como se muestra en el siguiente ejemplo

$3x(x-2)$ → *Distribución* → $3x^2 - 6x$

$3x(x-2)$ ← *Factorizacion* ← $3x^2 - 6x$

Casos especiales:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\boxed{a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)}$$

- ***Radicación***

La raíz cuadrada de un numero real se define como

$x = \sqrt{a}$ *significa:* $x^2 = a$ *y* $x \geq 0$

Como $a = x^2 \geq 0$, *el símbolo* $\sqrt{a}$ *solo tiene sentido para* $a \geq 0$*!*
He aquí dos reglas para operar con raíces cuadradas:

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}} \qquad \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Cabe destacar que $x = \sqrt{a}$ *porque* $x = \sqrt{a}$ *indica la raíz positiva.*

Análogamente se define la raíz n-esima:

$x = \sqrt[n]{a}$ *significa:* $x^n = a$
Si n es par, entonces $a \geq 0$ *y* $x \geq 0$.

- ***Potenciación***

Por definición:

1. $a^0 = 1$
2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
3. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
4. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Valen las siguientes leyes de potenciación

$$\boxed{\begin{array}{l} a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \\ \left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \end{array}}$$

- ***Ecuaciones***

1. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal en una incógnita es una expresión de la forma:

$$a \cdot x + b = 0$$

Donde a y b son constantes conocidas y x es la incógnita a despejar.
Si $a \neq 0$, la solución es

$$x = -\frac{b}{a}$$

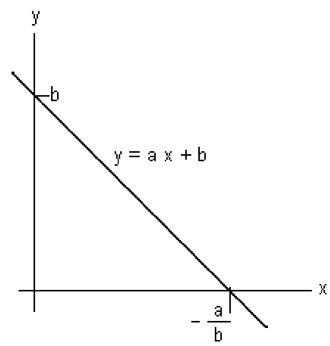
En general las ecuaciones vienen dadas en diferentes formas.

Ejemplo:

La ecuación $\dfrac{x+1}{x-2} = -1$, donde operando y aplicando las diferentes propiedades vistas se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} = -1 \quad &\Rightarrow \quad x+1 = (-1)(x-2) \\ &\Rightarrow \quad x+1 = -x+2 \\ &\Rightarrow \quad 2x-1 = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es x = ½ .
La interpretación geométrica de la solución es la siguiente:



Interpretación geométrica de la solución

La recta corta el eje x (es decir y es 0) cuando $x = -b/a$ *.*

2. Ecuaciones de segundo grado

Una ***ecuación de segundo grado*** *o ecuación cuadrática es una ecuación polinómica donde el mayor exponente es igual a dos.*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde ***a*** *es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y es siempre distinto de 0,* ***b*** *el coeficiente lineal o de primer grado y* ***c*** *es el término independiente.*

La ecuación cuadrática es de vital importancia en matemáticas aplicadas, física e ingeniería, puesto que se aplica en la solución de gran cantidad de problemas técnicos y cotidianos.

2.1. Clasificación

La ecuación de segundo grado se clasifica de la siguiente manera:

1.- ***Completa****:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

donde el símbolo "±" indica que los dos valores

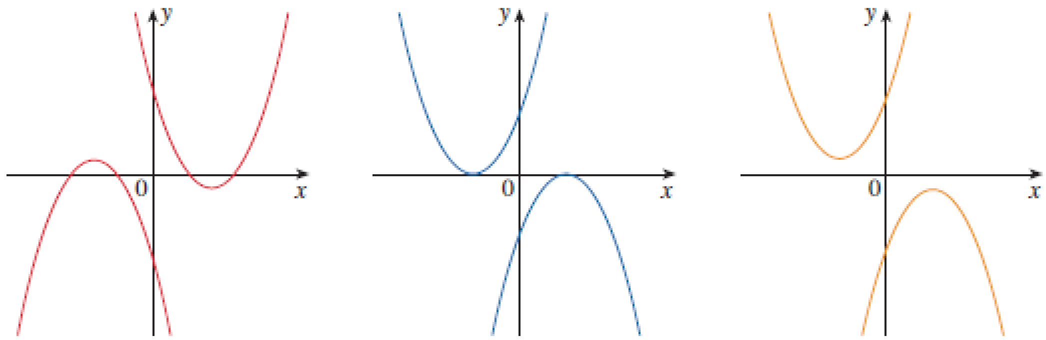
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son soluciones. Es interesante observar que esta fórmula celebérrima tiene las seis operaciones racionales del álgebra elemental

La expresión $b^2 - 4ac$ *en la formula se llama el discriminante y existen tres posibilidades:*

$b^2 - 4ac > 0$	$\Rightarrow$	*Dos soluciones reales y diferentes*
$b^2 - 4ac = 0$	$\Rightarrow$	*Una solución real doble, dicho de otro modo, de multiplicidad dos*
$b^2 - 4ac < 0$	$\Rightarrow$	*Ninguna solución real, la solución son dos números complejos conjugados*

Estos tres casos se pueden interpretar gráficamente como el número de cortes de la parábola (representación gráfica de una función cuadrática) con el eje x:



Caso 1 (Dos soluciones) *Caso 2 (Una solución)* *Caso 3 (Ninguna solución)*

*2.- **Incompletas**: De la forma:*

$ax^2 + c = 0$ *o* $ax^2 + bx = 0$

*donde los valores de **a** son distintos de cero. Se resuelve despejando x con operaciones inversas.*

3. Sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2

Un sistema de ecuaciones de 2 x 2 tiene la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y &= b_2
\end{aligned}
$$

El objetivo es encontrar el valor de las incógnitas x e y tales que la dos ecuaciones sean verdaderas.

Para un sistema de ecuaciones lineales es valida una de las siguientes tres situaciones:

1. *El sistema tiene una única solución*
2. *El sistema no tiene soluciones*
3. *El sistema tiene infinitas soluciones*

Para determinar si el sistema tiene solución o no, podemos apelar al siguiente método:

El sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

tiene una única solución si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Por otro lado, si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ *y*

1. a_{11}, a_{12}, b_1 *son múltiplos de* a_{21}, a_{22}, b_2 *respectivamente, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.*
2. a_{11}, a_{12} *son múltiplos de* a_{21}, a_{22} *respectivamente, pero* b_1 *no lo es de* b_2*, entonces el sistema no tiene soluciones.*

Ejemplos:

El sistema

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - y = -1$$

tiene única solución porque $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (2)(-1) - (3)(3) = -11 \neq 0$.

El sistema

$$2x + y = 6$$
$$4x + 2y = 1$$

NO tiene soluciones porque $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (2)(2) - (4)(1) = 0$ *y* $4x + 2y$ *es el doble de* $2x + y$*, pero 6 no es el doble de 1.*

El sistema

$$3x + 4y = 4$$
$$6x + 8y = 8$$

tiene infinitas soluciones porque $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (3)(8) - (6)(4) = 0$*, y además* $3x + 4y = 4$ *es la mitad de* $6x + 8y = 8$.

Métodos de resolución

Método de sustitución

1. *De la primera ecuación se despeja una incógnita, digamos x.*
2. *Se sustituye la incógnita despejada en la segunda ecuación.*
3. *Se reduce la segunda ecuación, y se encuentra el valor de y.*
4. *Finalmente se sustituye el valor de y en la ecuación del paso 1, y se encuentra x.*

Ejemplo:

Para el sistema

$$x + y = 1$$
$$x - y = 1$$

1. *Despejamos de la primera ecuación a x, entonces* $x = 1 - y$.
2. *Sustituimos a* $x = 1 - y$ *en la segunda ecuación:* $(1 - y) - y = 1$.
3. *Reducimos la ecuación anterior:*
$$\begin{aligned} (1-y)-y &= 1 \\ 1-2y &= 1 \\ 1-1 &= 2y \\ 0 &= y \end{aligned}$$
4. *Ahora, sustituimos el valor de* $y = 0$ *en la ecuación del paso 1:* $x = 1 - y = 1$.

Por lo tanto la solución del sistema es $x = 1, y = 0$.

Método de igualación

El método de igualación trabaja de la siguiente manera:

1. *De ambas ecuaciones se despeja una incógnita, digamos x.*
2. *Se igualan ambos despejes.*
3. *Despejamos entonces a y de la ecuación obtenida en el paso anterior.*
4. *Obtenemos a x sustituyendo a y en cualquiera de las ecuaciones del paso 1.*

Ejemplo:

Para el sistema
$$\begin{aligned} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{aligned}$$

1. *Despejamos de ambas ecuaciones a x, entonces*
$$\begin{aligned} x = 1 - y \\ x = 1 + y \end{aligned}.$$
2. *Igualamos ambos despejes:* $1 - y = 1 + y$.
3. *Resolvemos esta última ecuación:*
$$\begin{aligned} 1-y &= 1+y \\ 1-1 &= 2y \\ 0 &= y \end{aligned}$$
4. *Ahora, sustituimos el valor de* $y = 0$ *en una ecuación del paso 1:* $x = 1 - y = 1$.

Por lo tanto la solución del sistema es $x = 1, y = 0$.

Método de eliminación

El método de eliminación trabaja de la siguiente manera:

1. *Se multiplica la primera ecuación por un factor y la segunda ecuación por otro, de tal manera que restando una ecuación de la otra (lado a lado) se elimine una de las incógnitas.*
2. *Resolvemos el sistema reducido.*

3. *Despejamos la segunda variable sustituyéndola en cualquiera de las ecuaciones originales.*

<u>Ejemplo</u>:

Para el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

1. *No es necesario multiplicar las ecuaciones por ningún factor, ya que se observa que al restar una ecuación de la otra, queda una incógnita eliminada:*

$$\begin{aligned} (x+y)-(x-y) &= (0)-(0) \\ 2y &= 0 \end{aligned}.$$

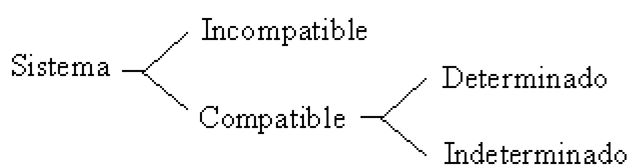
2. *Resolvemos el sistema reducido:* $y = 0$.
3. *Despejamos la segunda variable sustituyéndola en cualquiera de las ecuaciones originales:*

$$\begin{aligned} x+0 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución del sistema es $x = 1, y = 0$.

Tipos de sistemas

*Un sistema puede ser **incompatible** (no tiene soluciones), **compatible determinado** (tiene solución única) o **compatible indeterminado** (tiene infinitas soluciones):*



Discusión de un sistema

Discutir un sistema es determinar si es incompatible o compatible (y en ese caso si es determinado o indeterminado).

- ***<u>Ejercicios de revisión</u>***

1.-Graficar los siguientes intervalos:

i. *Todos los reales mayores que -2 y menores que 5*
ii. *Todos los reales menores que 2*
iii. *Todos los reales positivos menores o iguales a 1.5*
iv. $\{x \in R / x \geq -3 \wedge x < 5\}$
v. $\{x \in R / x \geq -3\}$
vi. $\{x \in R / x < 5\}$
vii. $\{x \in R / x \geq 3 \wedge x \leq 6\}$

Cuales de las siguientes operaciones dan como resultado un intervalo? En caso afirmativo, escribir el intervalo resultante:

i. $(3,7]\cap[4,6]$

ii. $(3,7]\cup[4,6]$

iii. $(3,7]\cap[-4,6]$

iv. $(0,4]\cap[4,6]$

v. $(-3,1]\cup(-5,3]$

vi. $(-3,1]\cup(-5,-3)$

vii. $(-\infty,2]\cap[-2,\infty)$

2. *Operar y simplificar*

i. $(-6ab)(0.5ac)$

ii. $-(2x^2y)(-xy^4)$

iii. $2x(x-5)$

iv. $(4-3x)x$

v. $-2(4-3a)$

vi. $8-(4+x)$

vii. $4(x^2-x+2)-5(x^2-2x+1)$

viii. $5(3t-4)-(t^2+2)-2r(t-3)$

ix. $(4x-1)(3x+7)$

x. $x(x-1)(x+2)$

xi. $(2x-1)^2$

xii. $(2+3x)^2$

xiii. $y^4(6-y)(5+y)$

xiv. $(t-5)^2-(t+3)(8t-1)$

xv. $(1+2x)(x^2-3x+1)$

xvi. $(1+x-x^2)^2$

3. *Realizar las operaciones indicadas y simplificar*

i. $\dfrac{2+8x}{2}$

ii. $\dfrac{9b-6}{3b}$

iii. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

iv. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

v. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

vi. $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

vii. $\dfrac{x/y}{z}$

viii. $\dfrac{x}{y/z}$

ix. $\left(\dfrac{-2r}{s}\right)\left(\dfrac{s^2}{-6r}\right)$

x. $\dfrac{a}{bc}\div\dfrac{b}{ac}$

xi. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

xii. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

4. *Factorizar las siguientes expresiónes*

i. $2x+12x^2$
ii. $5ab-8abc$
iii. x^2+7x+6
iv. x^2-x-6
v. x^2-2x-8
vi. $2x^2+7x-4$
vii. $9x^2-36$
viii. $8x^2+10x+3$
ix. $6x^2-5x-6$
x. $x^2+10x+25$
xi. t^2+1
xii. $4t^2-9s^2$
xiii. $4t^2-12r+9$
xiv. x^3-27
xv. x^3+2x^2+x
xvi. x^3-4x^2+5x-2
xvii. x^3+3x^2-x-3
xviii. $x^3-2x^2-23x+60$
xix. $x^3+5x^2-2x-24$

xx. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

5. *Simplificar las siguientes expresiónes*

i. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

ii. $\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

iii. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9x + 8}$

iv. $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^2 - x - 12}$

v. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2 - 9}$

vi. $\dfrac{x}{x^2 + x - 2} + \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

6. *Resolver las siguientes ecuaciónes*

i. $x^2 + 9x - 10 = 0$

ii. $x^2 - 2x - 8 = 0$

iii. $x^2 + 9x - 1 = 0$

iv. $x^2 - 2x - 7 = 0$

v. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

vi. $2x^2 + 7x + 2 = 0$

vii. $x^2 - 2x + 1 = 0$

viii. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$

7. *Operar con las siguientes expresiones*

i. $\sqrt{32}\sqrt{2}$

ii. $\dfrac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}}$

iii. $\dfrac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}}$

iv. $\sqrt{xy}\sqrt{x^3 y}$

v. $\sqrt{16a^4b^3}$

vi. $\dfrac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}}$

8. *Usar las reglas de la potenciación para rescribir y simplificar la expresión*

i. $3^{10}\times 9^{8}$

ii. $2^{16}\times 4^{10}\times 16^{8}$

iii. $\dfrac{x^{9}(2x)^{4}}{x^{3}}$

iv. $\dfrac{a^{n}\times a^{2n+1}}{a^{n-2}}$

v. $\dfrac{a^{-3}b^{4}}{a^{-3}b^{3}}$

vi. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

vii. $3^{-1/2}$

viii. $96^{1/5}$

ix. $125^{2/3}$

x. $64^{-4/3}$

xi. $\left(2x^{2}y^{4}\right)^{3/2}$

xii. $\left(x^{-5}y^{3}z^{10}\right)^{-3/5}$

xiii. $\sqrt[5]{y^{6}}$

xiv. $\left(\sqrt[4]{a}\right)^{3}$

xv. $\dfrac{1}{\left(\sqrt{t}\right)^{5}}$

xvi. $\dfrac{\sqrt[8]{x^{5}}}{\sqrt[4]{x^{3}}}$

xvii. $\sqrt[4]{\dfrac{t^{1/2}\sqrt{st}}{s^{2/3}}}$

xviii. $\sqrt[4]{r^{2n+1}}\times\sqrt[4]{r^{-1}}$

9. *Racionalizar las siguientes expresiones*

i. $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

ii. $\dfrac{\left(1/\sqrt{x}\right)-1}{x-1}$

iii. $\dfrac{x/\sqrt{x}-8}{x-4}$

iv. $\dfrac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}{h}$

v. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

vi. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

vii. $\sqrt{x^2+3x+4}-x$

viii. $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

10. Decidir si las siguientes expresiones son verdaderas para todo valor real o no

i. $\sqrt{x^2}=x$

ii. $\sqrt{x^2+4}=|x|+2$

iii. $\dfrac{16+a}{16}=1+\dfrac{a}{16}$

iv. $\dfrac{1}{x^{-1}+y^{-1}}=x+y$

v. $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+y}$

vi. $\dfrac{2}{4+x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}$

vii. $\left(x^3\right)^4=x^7$

viii. $6-4(x+a)=6-4x-4a$

11.- Resolver las siguientes ecuaciones

i. $14x^2 - 28 = 0$

ii. $(x + 6)(x - 6) = 13$

iii. $(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$

iv. $(x + 11)(x - 11) = 23$

v. $x^2 = 7x$

vi. $21x^2 + 100 = - 5$

vii. $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$

viii. $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = - 16$

ix. $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$

x. $x^2 + 12x + 35 = 0$

xi. $x^2 - 3x + 2 = 0$

xii. $x^2 + 4x =285$

xiii. $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = - 8$

xiv. $(x + 2)^2 = 1 - x(x + 3)$

xv. $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{2x}=\dfrac{13}{6}$

xvi. $\dfrac{x+4}{x+5}\cdot\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{1}{24}$

xvii. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}=2$

xviii. $\dfrac{x}{6}+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{2x}{3}$

xix. $\dfrac{5x-8}{x-1}=\dfrac{7x-4}{x+2}$

11.- Resolver los siguientes problemas

i. *Dividir el numero entero 120 en dos partes cuya razón sea igual a* $1/2$ *. Rta. 80 y 40*

ii. *Dividir el numero 500 en dos partes cuya razón sea igual a* $1/2$

iii. *El hermano mayor de una familia con tres hermanos tiene 4 años más que el segundo y éste 3 más que el menor. Si entre todos tienen la edad del padre que tiene 40 años ¿qué edad tiene cada hermano? Rta: 13, 17*

iv. *La diagonal de un rectángulo mide 26cm y el perímetro 68cm. Hallar los lados del rectángulo.*

v. *En cierto país de nuestro planeta para un nivel de ingresos mayor de $40,000, el impuesto a pagar es de $10,000 más el 45% del exceso de $40,000. Si la ciudadana María pagará $13,000 de impuestos por sus ingresos, ¿cuánto fue el ingreso de María?*

vi. *El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala.*

vii. *Hallar un número de dos cifras sabiendo que estas son dos números consecutivos y que el cuadrado del número es 209 unidades mayor que 10 veces el número primitivo.*

viii. *Hallar dos números consecutivos cuyo producto es 56.*

ix. *Un ganadero compra corderos por $ 120000. Se le mueren 3 y el resto los vende a $ 3000 mas cada uno de lo que le costo, perdiendo $ 15000. Cuantos compro y a que precio? Rta: Compró 120 y las pagó 1000.*

x. *El costo total de 5 libros de texto y 4 lapiceras es de $32.00; el costo total de otros 6 libros de texto iguales y 3 lapiceras es de $33.00. Hallar el costo de cada artículo. Rta: 4$ los libros y 3$ los lápices*

xi. *Se tienen $120.00 en 33 billetes de a $5 y de a $2. ¿Cuántos billetes son de $5 y cuántos de $2? Rta: 18 y 15*

xii. *Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es 1/2 , y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es 1/3. Hallar la fracción. Rta : 13 y 5*

xiii. *La edad de un padre de familia es triple que la de su hijo. Dentro de 16 años será solamente el doble. ¿Qué edad tiene cada uno? Rta: 16 y 48*

xiv. *Si una mujer de 120 libras quema un promedio de 10 calorías por minuto corriendo, y x es el numero de minutos que ejercita, e y es el numero de calorías quemadas, entonces: (a) cual es la ecuación que liga ambas variables? (b) cuantas calorías quema en 30 minutos ? (c) si se quieren quemar 800 calorías, cuanto tiempo deberá correr ? Rta: b) 300 cal; c) 80 min*

- ## ***PARTE B : Matrices - Vectores –Inecuaciones-Sistemas de ecuaciones e inecuaciones***

- ***Matrices y sus aplicaciones***

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850. El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático Hamilton en 1853. En 1858, se introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos,...

- ***Definición de matriz***

*Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos* $\mathbf{a_{ij}}$ *dispuestos en **m** líneas horizontales (filas) y **n** verticales (columnas) de la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente suele expresarse en la forma $A = (a_{ij})$*, con* $i = 1, 2, \ldots, m$*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*. Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j). Por ejemplo el elemento* a_{25} *será el elemento de la fila 2 y columna 5.*

*Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales*

- ***Algunos tipos de matrices***

Vamos a describir algunos tipos de matrices que aparecen con frecuencia debido a su utilidad, y de los que es conveniente recordar su nombre.

Matriz fila: *Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden **1xn**.*

$A□(a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$

Matriz columna: *Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden **m x 1***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{i1} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: *Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir*

***m = n**. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n.*

Los elementos a_{ij} *con i **=** j, (es decir* a_{11}*,* a_{22}*, etc) forman la llamada **diagonal principal** de la matriz cuadrada, y la otra diagonal es la secundaria.*

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ *la diagonal principal está formada por (1, 1, 9) y la diagonal secundaria por (0, 1, 3*

Matriz traspuesta: *Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas. La primera fila de A es la primera fila de A^t , la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc. De la definición se deduce que si A es de orden m x n, entonces A^t es de orden n x m.*

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ , entonces } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz nula *es aquella que todos sus elementos son 0 y se representa por* ***0****.*

Matriz diagonal: *Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.*

Matriz escalar: *Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales.*

Matriz unidad *o* ***identidad:*** *Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1.*

Matriz Triangular: *Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:*

Triangular Superior: *Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos*

Triangular Inferior: *Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos.*

- ***Suma y diferencia de matrices***

La suma de dos matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ de la misma dimensión, es otra matriz $S=(s_{ij})$ de la misma dimensión que los sumandos y con término genérico $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no se pueden sumar.*

La diferencia de matrices A y B se representa por A–B, y se define como: A–B = A (–B)

- ***Producto de una matriz por un número***

El producto de una matriz A = (a_{ij}) por un número real k es otra matriz B = (b_{ij}) de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k, es decir, $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$.

El producto de la matriz A por el número real k se designa por k·A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

$$3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 0\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 12 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

- ***Producto de matrices***

Dadas dos matrices A y B, su producto es otra matriz P cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B. De manera más formal, los elementos de P son de la forma:

$$p_{ij}=\sum a_{ik}\cdot b_{kj}$$

*Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión **m**x **n** y B dimensión **n**x **p**, la matriz P será de orden **m**x **p***

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$$ *no se pueden multiplicar.*

$$\begin{pmatrix}r & s\\ t & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ra_1+sb_1 & ra_2+sb_2 & ra_3+sb_3\\ ta_1+ub_1 & ta_2+ub_2 & ta_3+ub_3\end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices

1. *A·(B·C) = (A·B)·C*
2. *El producto de matrices en general no es conmutativo.)*

- ***Matriz inversa***

Decimos que A^{-1} es la matriz inversa de A si A . A^{-1} = A^{-1}. A = I (Identidad)

Matrices inversibles

*Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es **inversible o regular**; en caso contrario recibe el nombre de **singular.***

Observación
Podemos encontrar matrices que cumplen A·B = I, pero que B·A≠ I, en tal caso, podemos decir que A es la inversa de B "por la izquierda" o que B es la inversa de A "por la derecha".

*Hay varios **métodos para calcular la matriz inversa** de una matriz dada:*

- *Directamente*

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *buscamos una matriz que cumpla $A \cdot A^{-1} = I$, es decir*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ello planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -c \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2c - c = 1 \\ d = 2b \\ a = -c \\ b + 2b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rr} a = \frac{1}{3} & b = \frac{1}{3} \\ c = -\frac{1}{3} & d = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La matriz que se ha calculado realmente sería la inversa por la "derecha", pero es fácil comprobar que también cumple $A^{-1} \cdot A = I$, con lo cual es realmente la inversa de A.

- *Usando determinantes*
- *Por el método de Gauss-Jordan*

Por lo tanto antes de continuar con la inversa de una matriz hablaremos de los

- ***Determinantes***

Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*se llama **determinante de A** a un numero real que la caracteriza y se representa por **|A|** ó **det (A)***

- ***Cálculo de determinantes de órdenes 1, 2 y 3***

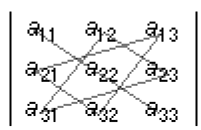
Es fácil comprobar que aplicando la definición se tiene: $A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

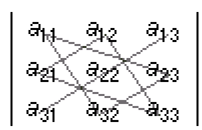
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

En este último caso, para acordarnos de todos los productos posibles y sus correspondientes signos se suele usar la Regla de Sarrus que consiste en un esquema gráfico para los productos positivos y otro para los negativos:



(Para los tres productos positivos).



(Para los tres productos negativos).

Cálculo de un determinante por los adjuntos de una línea

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno cualquiera de sus elementos. Si se suprime la fila i y la columna j de la matriz A se obtiene una submatriz ***M_{ij}*** *que recibe el nombre de* ***matriz complementaria del elemento a_{ij}.***

Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

la matriz complementaria del elemento a_{11} es la matriz que resulta de suprimir en la matriz A la fila 1 y la columna 1; es decir:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Llamamos menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de la matriz complementaria del elemento a_{ij} , y se representa por $|M_{ij}|$

*Se llama **adjunto de a_{ij}** , y se representa por **A_{ij}**, = $(-1)^{i+j}$ $|M_{ij}|$*

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos.

Por ejemplo, si desarrollamos un determinante de orden n por los adjuntos de la 1ª fila se tiene:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1j}$$

Nota
Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros

Desarrollando por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

- ***Cálculo de la matriz inversa usando determinantes***

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A, y se representa por Adj(A), a la matriz de los adjuntos, Adj(A) = (A_{ij}).

Dada la maatriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene :

$\det(A) = 2$

$A_{11} = 2 \quad A_{12} = -4 \quad A_{13} = -7$

$A_{21} = 0 \quad A_{22} = -2 \quad A_{23} = -2$

$A_{31} = -2 \quad A_{32} = 4 \quad A_{33} = 6$

Por tanto : $\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Si tenemos una matriz tal que det (A) ≠0, se verifica:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left[\operatorname{Adj}(A)\right]^t$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(A) = 3 \\ \operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ***Cálculo de la matriz inversa por el metodo de Gauss - Jordan***

Queremos calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Se escribe la matriz A junto a esta la matriz identidad,*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. *Triangularizamos la matriz A de arriba a abajo y realizamos las mismas operaciones en la matriz de la derecha.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_3-3F1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Como podemos observar el rango de la matriz es máximo (en este caso 3), por tanto la matriz A es regular (tiene inversa), podemos calcular su inversa.

3. *Triangularizamos la matriz de abajo a arriba, realizando las mismas operaciones en la matriz de la derecha.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_1+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

4. *Por último se divide cada fila por el elemento diagonal correspondiente.*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - -\frac{1}{2}F_3]{F_1 - \frac{1}{6}F_1,\ F_2 - \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- ***Aplicación de las matrices y los determinantes a los sistemas de ecuaciones lineales***

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_i son los términos independientes.

- ***Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales***

El anterior sistema se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De modo simplificado suele escribirse $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$, donde la matriz A de orden m x n se denomina matriz de coeficientes.
También usaremos la matriz ampliada, que representaremos por A', que es la matriz de coeficientes a la cual le hemos añadido la columna del término independiente:

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- ***Discusión de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales***

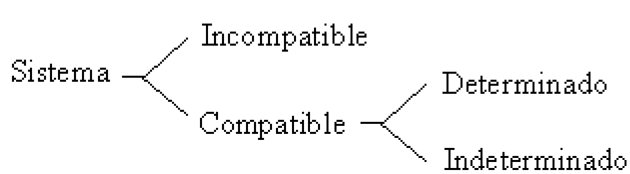
Tengamos en cuenta que

Si A es la matriz de los coeficientes del sistema,

1) si ***det A ≠ 0****, el sistema tiene* ***solución única, es un sistema compatible determinado.***

2) si ***det A = 0 ,*** *el sistema no tiene solución unida*

Tipos de sistemas
Un sistema puede ser ***incompatible*** *(no tiene soluciones),* ***compatible determinado*** *(tiene solución única) o* ***compatible indeterminado*** *(tiene infinitas soluciones):*



Discutir un sistema es determinar si es incompatible o compatible (y en ese caso si es determinado o indeterminado).

- ***Resolución de un sistema de ecuaciones lineales***

a) Regla de Cramer

Es aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas (n=m) y es compatible determinado El valor de cada incógnita x_i se obtiene de un cociente cuyo denominador es el determinate de la matriz de coeficientes, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al cambiar la columna i del determinante anterior por la columna de los términos independientes.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+3+4)-(-3+2+2)=5$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 24 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-11+24+10)-(-24+22+5)=20$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix} = (5+33+48)-(15+24+22)=25$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 24 \end{vmatrix} = (-24+15+44)-(-33+10+48)=10$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{20}{5}=4 \ ; \ y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{25}{5}=5 \ ; \ z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{10}{5}=2$$

b) Por inversión de la matriz de coeficientes

Si $A \cdot X = B$, entonces $X = A^{-1}B$.

Es aplicable si el sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas (n=m) y es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right) \; ; \; A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left[Adj(A)\right]^{T}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \; ; \; \left[Adj(A)\right]^{T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Método de eliminación de Gauss-Jordan

Escribimos la matriz ampliada del sistema lineal que ya hemos presentado

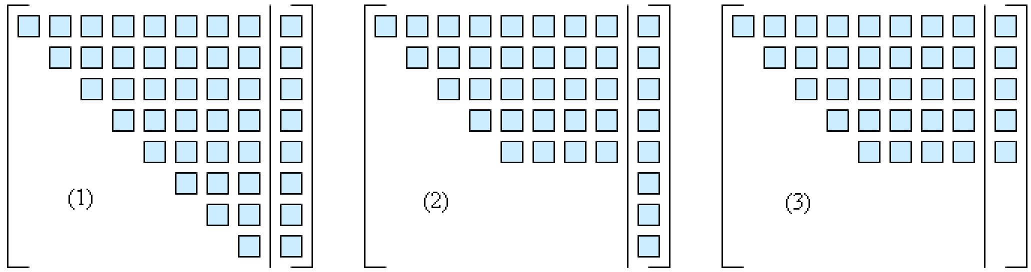
$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_m \end{array}\right]$$

La idea es partir de la matriz ampliada y, mediante operaciones fila, llegar a una matriz de la forma:

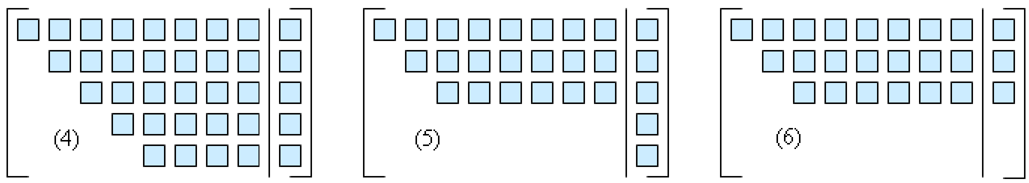
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nm} & b'_m \end{array}\right]$$

Ya que una vez en esta forma es fácil encontrar las soluciones por sustitución inversa. Para el despeje final de las soluciones consideremos los siguientes casos (un cuadrado simboliza un número no nulo, un espacio vacío es un cero):

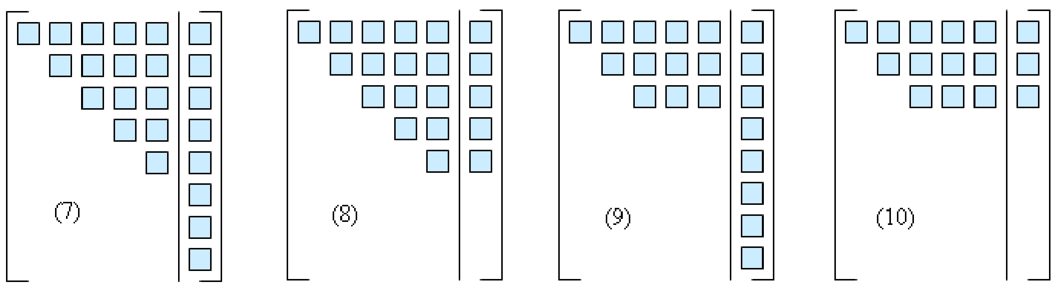
a) $n = m$



b) n > m



c) n < m



En cada caso se analiza el despeje de las incógnitas y se llega a las siguientes conclusiones:

(1) Compatible determinado

(2) Incompatible

(3) Compatible indeterminado

(4) Compatible indeterminado

(5) Incompatible

(6) Compatible indeterminado

(7) Compatible indeterminado

(8) Compatible determinado

(9) Compatible indeterminado

(10) Compatible indeterminado

Ejemplos:

Resolver

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Apliquemos el método de eliminación a la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

[1] $fila2 = fila2 - 2 \cdot fila1$

$fila3 = fila3 - 5 \cdot fila1$

[2] $fila3 = fila3 + 6 \cdot fila2$

La ecuación equivalente resultante es:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 3 \\ 25z = 3 \end{cases}$$

Se trata de un sistema compatible determinado, de donde se despeja:

$$z = \frac{3}{25}, y = \frac{16}{25}, z = \frac{12}{25}.$$

Resolver

$$\begin{cases} 3x + 3y + 11z - t = 8 \\ 2x + 5z + 3t = 4 \\ x - y + 2z + 2t = 2 \end{cases}$$

Apliquemos el método de eliminación a la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 11 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 11 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2]} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3]} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

[1] $fila1 \leftrightarrow fila3$

[2] $fila2 = fila2 - 2 \cdot fila1$

$fila3 = fila3 - 3 \cdot fila1$

[3] $fila3 = fila3 - 3 \cdot fila2$

La ecuación equivalente resultante es:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 2t = 2 \\ 2y + z - t = 0 \\ 2z - 4t = 2 \end{cases}$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado, de donde se despeja:

$$x = 1 + 2t, y = \frac{-1}{2} - \frac{t}{2}, z = \frac{-1}{2} - \frac{13t}{2}.$$

- ***Ejercicios de Matrices y sus aplicaciones***

1. *Dadas la matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular (A + B) · C

2. Siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar M · N **-** *N · M*

3.-Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & z & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calcular x, y, z, sabiendo que A · B = C

4.-Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular AxB - BxC.

5.-Obtener los valores de a, b y c, que hacen cierta la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

6.-Obtener los valores x, y, z, que hacen cierta la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

7.-Obtener los valores x, y, z que hacen cierta la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$$

8.-- a) Encuentre una matriz X que verifique la igualdad A.B-X =A^2, siendo :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcule, si es posible, la inversa de X

9.-- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que verifica $A^2 - 2A + I = 0$*, siendo I la matriz identidad de orden 3.*

10.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el que las incógnitas X e Y son matrices de 2x3

$$2.X - 3.Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-X + 2.Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rta: $X = \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix}$ $\qquad$ $Y = \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}$

11.- a) Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

b)Luego reemplazar el numero recuadrado por un 3 y volver a calcular la inversa.

Rtas.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 7 & -2 \\ 8 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *b) no existe* A^{-1}

12.- a) Clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro λ,

$$\left.\begin{array}{l} (1+\lambda)x + y + z = 1 \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^2 \end{array}\right\}$$

b)Determinar los valores de λ para que el sistema sea compatible indeterminado

$$\begin{cases} -x+\lambda y+z=1 \\ 2x-y-2z=-1 \\ \lambda x-3y-z=-3 \end{cases}$$

13.- Aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan resolver :

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+z=2 \\ -x+y=3 \\ x-y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-z+t=-1 \\ x+y+z=0 \\ -x+2y-z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+3z=-4 \\ 2x+y-z=5 \\ y+2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z=-2 \\ y-2z=2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$$

14.-Discutir (y resolver si es posible) los siguientes sistemas (es decir, decidir si son incompatibles, compatibles determinados o compatibles indeterminados)

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \\ -x+2y-z=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x-y=0 \\ -x+2y-z=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y+z-t=1 \\ 2x+4y-6t=0 \\ x+y-z+2t=0 \\ 3x+6y-9t=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-z+t=-1 \\ x-y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-y+z+2t=1 \\ 2x+2y-2z+2t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+y+a\cdot z=a \\ y-z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+a\cdot z=a \\ x+y+a\cdot z=a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y+a\cdot z=0 \\ a\cdot y-z=2 \\ a\cdot x+a\cdot y+a\cdot z=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x+b\cdot y+a\cdot z=1 \\ x+a\cdot b\cdot y+z=b \\ a\cdot x+b\cdot y+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4 \\ x_1+3x_2+7x_3=5 \\ x_1+x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=8 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=3 \\ 3x_1+x_2-2x_3=-2 \\ x_1-x_2+x_3=7 \\ x_1+5x_2+7x_3=13 \\ x_1-7x_2-5x_3=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-4z=3 \\ x+2y+3z=-1 \\ 2x+3y-z=5 \\ 4x+3y-2z=7 \\ 5x+3y-6z=7 \end{cases}$$

15.-Determine el (los) valor (es) de k de modo que el sistema de ecuaciones lineales dado tenga el numero de soluciones indicado.

$$\begin{aligned} 4x+ky&=7 \\ kx+y&=0 \end{aligned}$$ *Exactamente una solución.*

$$\begin{aligned} x+2y+kz&=6 \\ 3x+6y+8z&=4 \end{aligned}$$ *Infinitas soluciones.*

$$\begin{aligned} x+2y+kz&=6 \\ 3x+6y+8z&=4 \end{aligned}$$ *Ninguna solución*

$$\begin{aligned} kx+2ky+3kz&=4k \\ x+y+z&=0 \\ 2x-y+z&=1 \end{aligned}$$ *Exactamente una solución.*

16.- Resolver los siguientes problemas *a)Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos - digamos A, B y C - que demandan toda su producción. En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C. ¿Cuántas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana?*

b) Se quieren obtener 10 kg. de pasta de trigo, arroz y maíz, cuyos precios son $ 20, $ 40 y $25 respectivamente. Hallar la cantidad de cada materia que ha de formar la pasta, sabiendo que el precio resultante ha de ser de $40 y que la cantidad de arroz ha de ser doble que la de maíz.

c) Una empresa cinematográfica dispone de tres cines C1 , C2 , y C3. Cierto día, en cada uno de ellos, proyecta tres películas, P1 , P2 y P3, (P1 en sesión de mañana, P2 en sesión de tarde, y P3 en sesión de noche). El nº de asistentes, (expresado en centenares), a cada una de ellas se indica en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c} \\ C1 \\ C2 \\ C3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P1 & P2 & P3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}} \end{array}$$

Sabiendo que los ingresos obtenidos en ese día , en C1 , C2 y C3, fueron de $ 150000, $ 140000 y $90000 respectivamente. Calcular el precio de la entrada para cada una de las tres películas.

- ***Vectores en el plano y en el espacio***

*Dados dos puntos en el plano A y B , el **vector** de origen A y extremo B es el segmento AB, su **modulo** es la longitud del segmento AB, su **dirección** es la recta AB y su **sentido** es de A a B. Si $A=(a_1, a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ el vector $v=(v_1, v_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.*

*El **modulo** esta dado por*
$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2$

***Producto de un vector por un escalar**:*
$k \cdot v = (k.v_1, k.v_2)$

***Suma de vectores**:*
Dados $v=(v_1, v_2)$ y $w=(w_1, w_2)$, $v + w = (v_1+w_1, v_2+w_2)$

***Producto escalar**:*
Dados $v=(v_1, v_2)$ y $w=(w_1, w_2)$, $v.w = v_1.w_1 + v_2.w_2 = |v| . |w| \cos \alpha$ *(siendo α el ángulo entre ambos vectores)*

Vectores Paralelos
$v // w \leftrightarrow v = k.w$

Vectores Ortogonales
v ortogonal (perpendicular) a w si v . w = 0

- ***Vectores en el espacio***

En el espacio los vectores se definen como en el plano.

Si $A=(a_1, a_2, a_3)$ y $B=(b_1, b_2, b_3)$ el vector $v=(v_1, v_2, v_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

*El **modulo** esta dado por*
$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

***Suma de vectores**:*
Dados $v=(v_1, v_2, v_3)$ y $w=(w_1, w_2, w_3)$, $v + w = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3 + w_3)$

***Producto escalar**:*

Dados $v=(v_1, v_2, v_3)$ y $w=(w_1, w_2, w_3)$, $v.w = v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3 = |v|.|w| \cos \alpha$
(siendo α el ángulo entre ambos vectores)

Vectores Paralelos
$v \,//\, w \leftrightarrow v = k.w$

Vectores Ortogonales
v ortogonal (perpendicular) a w si $v . w = 0$

Producto vectorial

El producto vectorial de v por w , es un vector u, ortogonal a v y a w , cuyo modulo
$|v \times w| = |v|.|w| . \operatorname{sen} \alpha$
El modulo del producto vectorial es el área del paralelogramo determinado por los vectores v y w.
El producto vectorial se calcula resolviendo el siguiente determinante

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Producto Mixto

El producto mixto entre los vectores u, v y w, en ese orden, es $u.(v \times w)$ (es decir el producto escalar del vector u con el resultado del producto vectorial de v y w)
El resultado de esta operación nos da el volumen del paralelepípedo de aristas u, v y w.

$$u.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- ***Ejercicios de Vectores en el plano y en el espacio.***

1) Si $v=(2,-1)$ $w = (-1,1)$
Calcula a) $v + w$
b) $v-w$
c) $2.v + 3w$
d) $v.w$
2) Si $u=(1,-1,2)$ y $t=(0,2,-1)$
Idem 1

3) Cuales de los siguientes pares de vectores son ortogonales?
a) (2, -1) y (-2; 4)
b) (1,-2) y (2,-1)
c) (1,-1,1) y(2.3.1)

d) (1,-1,1) y (2,1,5)

4) *Determinar el ángulo determinado entre los siguiente pares de vectores.*
a) *(2, -1) y (-2; 4)*
b) *(1,-1,1) y (2,1,5)*

5) *Dados u =(2,-1,3) y v =(1,-1,4) , determinar*
a) *el ángulo que forman (Rta: 19º aprox)*
b) *el área del triangulo que los tiene por lados (Rta 3/2 √3)*
c) *vectores unitarios (modulo =1) ortogonales a cada uno*
(Rta. -2/9 √3(1,5,1) y 2/9 √3(1,5,1))
d) *un vector en el mismo plano que u y v y ortogonal a u (Rta (-16, 1,11))*

- ***Inecuaciones y sus aplicaciones***

Una inecuación es una desigualdad en la que aparece una incógnita. Si el grado de la inecuación es uno, se dice que la inecuación es lineal.
Resolver una inecuación es encontrar los valores de la incógnita para los cuales se cumple la desigualdad.
La solución de una inecuación es, por lo general, un intervalo o una unión de intervalos de números reales.
El método para resolver una inecuación es similar al utilizado para resolver ecuaciones, pero teniendo presente las propiedades de las desigualdades.
Es conveniente ilustrar la solución de una inecuación con una gráfica. Si la solución incluye algún extremo del intervalo, en la gráfica representamos dicho extremo con un círculo en negrita ó un corchete; en cambio, si la solución no incluye el extremo, lo representamos mediante un círculo blanco o un paréntesis .
Ejemplos:

Resolver

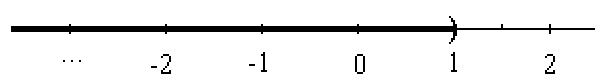
a) $3x - 2 < 1$

Despejando

$$3x - 2 < 1$$
$$3x < 1 + 2$$
$$3x < 3$$
$$x < 3 : 3$$
$$x < 1$$

Solución: S = (- ∞ , 1)

Representación gráfica:



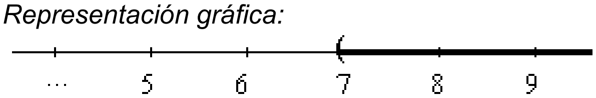
b) $\frac{x+1}{2} > 4$

Despejando

$$\frac{x+1}{2} > 4$$
$$x + 1 > 4 . 2$$
$$x + 1 > 8$$

Solución: S = (7 , + ∞)

Representación gráfica:



$x > 8 - 1$

$x > 7$

c) $x + y \geq 24$

Es una inecuación lineal con dos incógnitas que se verifica para infinitas parejas de números. Por ejemplo:

$x = 0$; $y = 24$

$x = 2$; $y = 23$

$x = -3$; $y = 30$

$x = 1$; $y = 10$

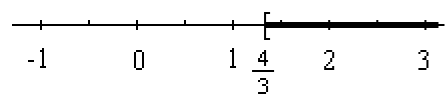
d) $-2x + 1 \leq x - 3$

Despejando

$$-2x + 1 \leq x - 3$$
$$-2x - x \leq -3 - 1$$
$$-3x \leq -4$$
$$x \geq -4 : (-3)$$
$$x \geq \frac{4}{3}$$

Solución: $S = [\frac{4}{3}, +\infty)$

Representación gráfica:



Las inecuaciones permiten resolver problemas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: *Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre el peso de la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 415 kg. Si hay que cargar cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder llevarlos en esa furgoneta?.*

En primer lugar, traducimos el enunciado al lenguaje simbólico, llamamos x al peso de cada cajón y planteamos la siguiente inecuación:

Peso de la furgoneta - peso de 4 cajones no es menor que 415 kg

$$875 - 4 \cdot x \geq 415$$

Una forma de resolver la inecuación es seguir los siguientes pasos:

- *Restamos 875 a ambos miembros de la desigualdad* ⟶ $-4 \cdot x \geq 415 - 875$
- *Hacemos el cálculo en el segundo miembro* ⟶ $-4 \cdot x \geq -460$

- *Para despejar x , multiplicamos a ambos miembros por* $-\frac{1}{4}$

  *(**Cuidado:** como multiplicamos por un número negativo, debemos cambiar el sentido de la desigualdad)* ⟶ $x \leq \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-460)$

- *Hacemos el cálculo* ⟶ $x \leq 115$

Esto significa que el peso de cada cajón no podrá superar los 115 kg. Además, como se trata de un peso, $x > 0$.
Entonces, la solución está formada por todos los números reales pertenecientes al intervalo $(0 , 115]$.
Graficamos la solución en la recta real:

Una inecuación lineal con dos incógnitas se puede escribir, una vez simplificada, en las formas siguientes: $y > ax + b$, $y < ax + b$

en sentido estricto (<, >) o en sentido amplio (≤ menor o igual, ≥ mayor o igual).

Recordando la representación gráfica, mediante una recta, de la función afín $y = ax + b$, *se observa que dicha recta divide al plano en dos semiplanos.*

Calculamos, en un ejemplo concreto, para un valor de x, abscisa, el correspondiente valor de y, ordenada, en la recta.

Representamos, junto con este punto calculado, varios puntos con las mismas abscisas que el anterior pero con valores superiores en las ordenadas, viendo que todos quedan encima de la recta. Después representamos otro conjunto de puntos con las mismas abscisas pero con valores inferiores en las ordenadas, comprobando que ahora quedan debajo de la recta.

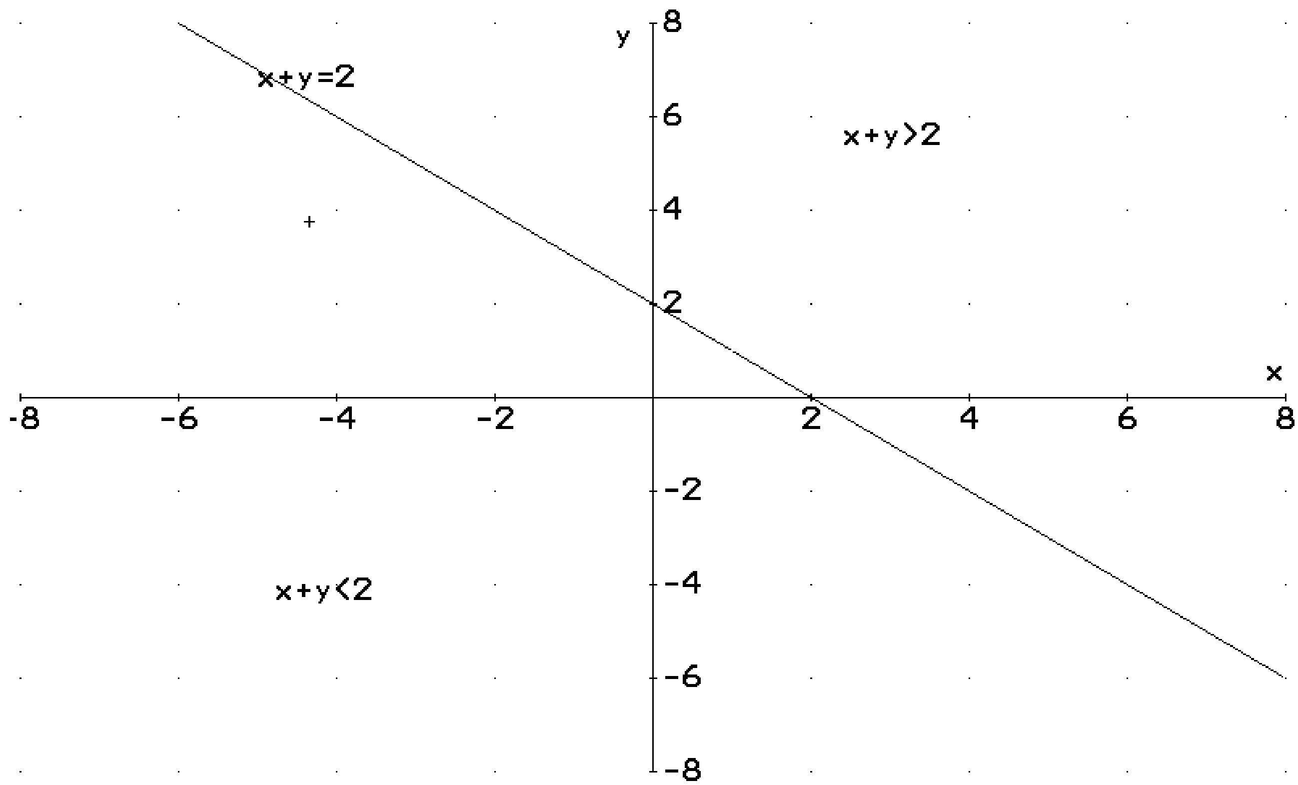
Resumimos: En general, la solución de una inecuación lineal con dos incógnitas es un semiplano. Los situados por encima de la recta $y = ax + b$ *forman la solución de* $y > ax + b$, *y, los situados por debajo la solución de* $y < ax + b$.

Ejemplo 1.- *Veamos una inecuación con dos incógnitas, por ejemplo* $x + y > 2$, *se trataría de buscar parejas de números x e y (o sea, (x , y)) que al sumarse sean mayores que 2. Por ejemplo, 2 y 1 (2+1>2), o 3 y 2 (3+2>2) como puedes imaginarte infinitas parejas de números.*

Vamos a ver un método sencillo de resolver estas inecuaciones; primero buscamos las parejas de números que hacen que x + y sea igual a 2, (como sabes, están sobre la recta de ecuación $x + y = 2$) *y claro está, las restantes parejas su suma será distinta de 2, o bien mayor que 2 o bien menor que 2.*

Vamos a verlo gráficamente:

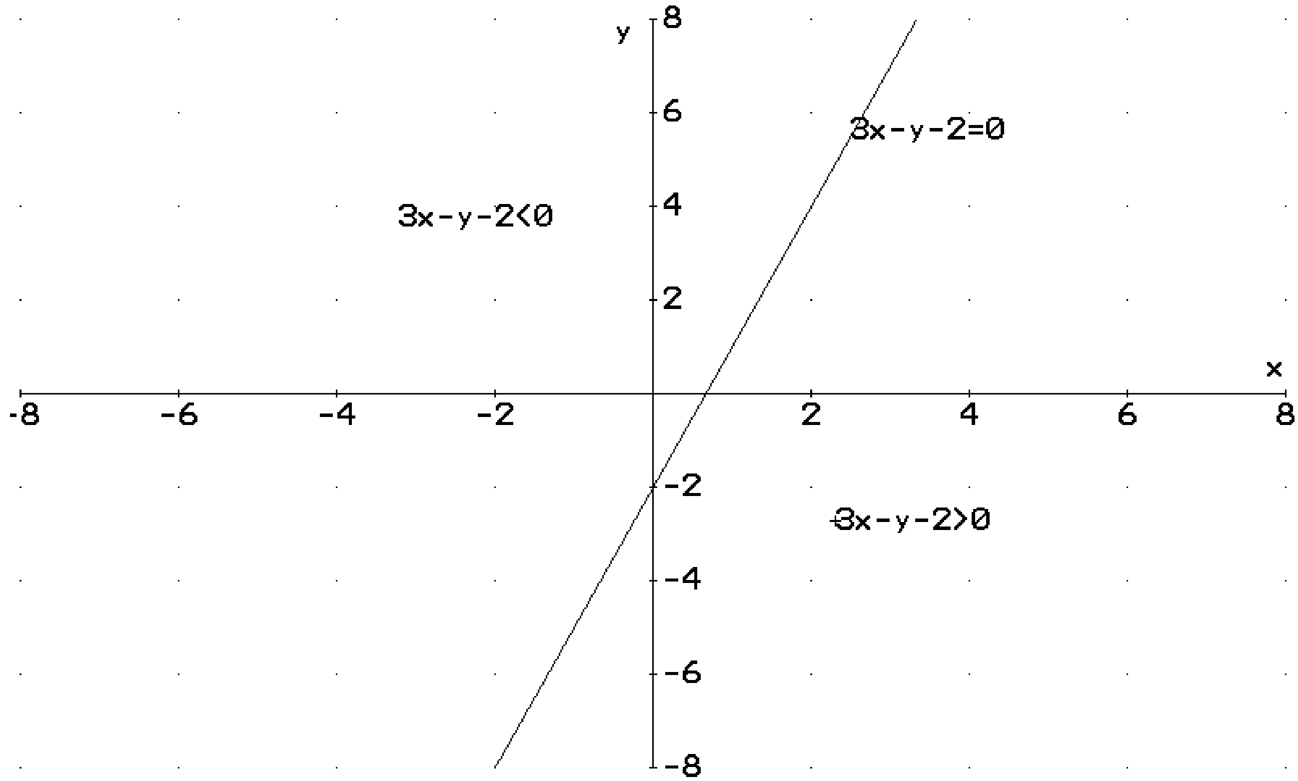
Primero representamos la recta $x + y = 2$, *en la recta estarán todas las parejas de números (x e y) que al sumarse dan exactamente 2. Fuera de la recta estarán las parejas que al sumarse den distinto de 2, o bien mayores o bien menores que 2. ¿Cómo ver qué región del plano le* *corresponde a cada uno?, escogemos un punto fuera de la recta, el más fácil es el punto (0,0), observa que NO está sobre la recta. Sustituye su valor en la ecuación 0 + 0 < 2, luego por debajo de la recta estarán TODAS las parejas de x e y que al sumarse dan un número menor que el 2. Por encima de la recta estarán los que su suma es mayor que 2, que es la solución de la inecuación.*



Ejemplo 2.- *Representar la región del plano solución de la inecuación:* ***3x – y – 2 < 0***

Procedamos igual que antes, representamos la ***recta 3x – y – 2 = 0****. Observa la gráfica:*

*Para saber cuál es la región negativa (****<0****) y cuál es la positiva* ***(>0****), escogemos un punto fuera de la recta, por ejemplo, el (0,0), si lo sustituimos en la ecuación: 0 – 0 – 2, da un número negativo, luego esa es la región negativa (****<0****). Y la otra la positiva (****>0****).*

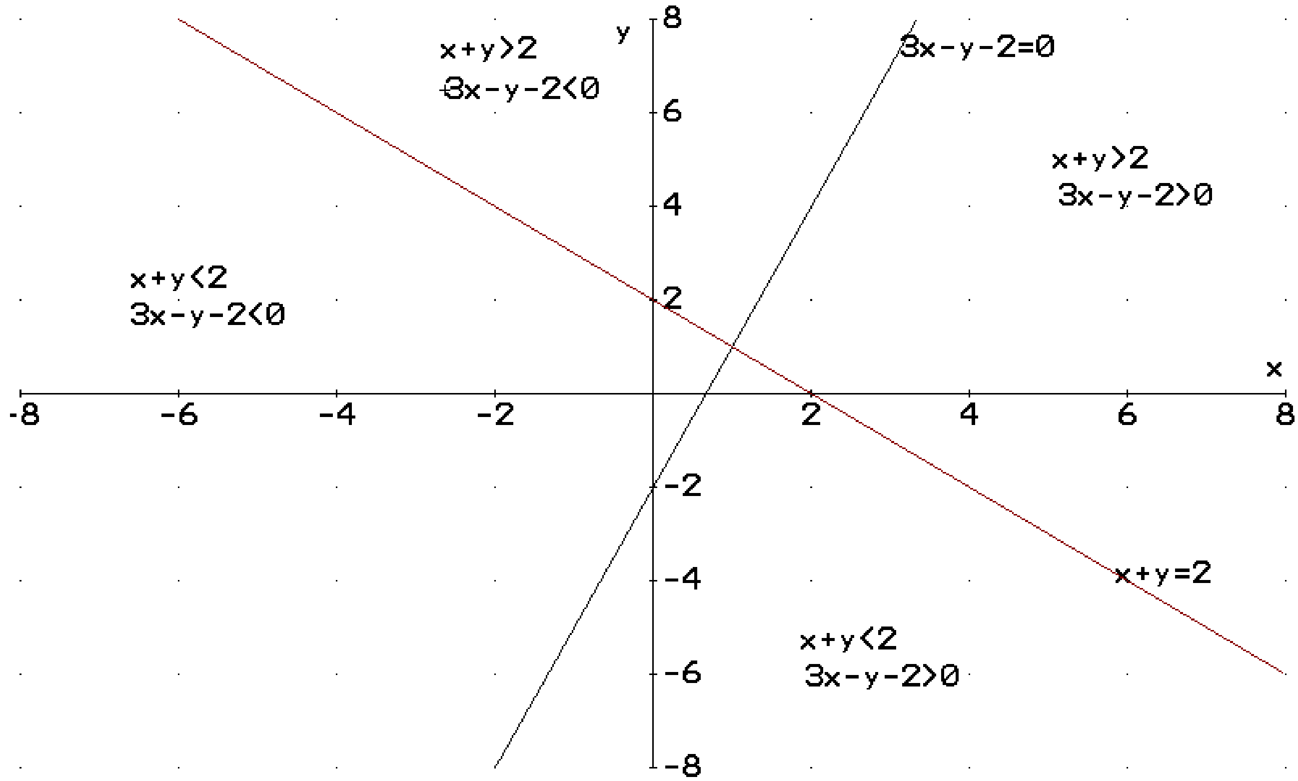


Un sistema de inecuaciones lineales es un conjunto de más de una inecuación que deben satisfacerse a la vez.

Podemos representar, en la gráfica, la solución de cada una de las inecuaciones de distinta forma, cambiando el color o el tipo de subrayado, y, superponiendo las gráficas encontrar la zona común.

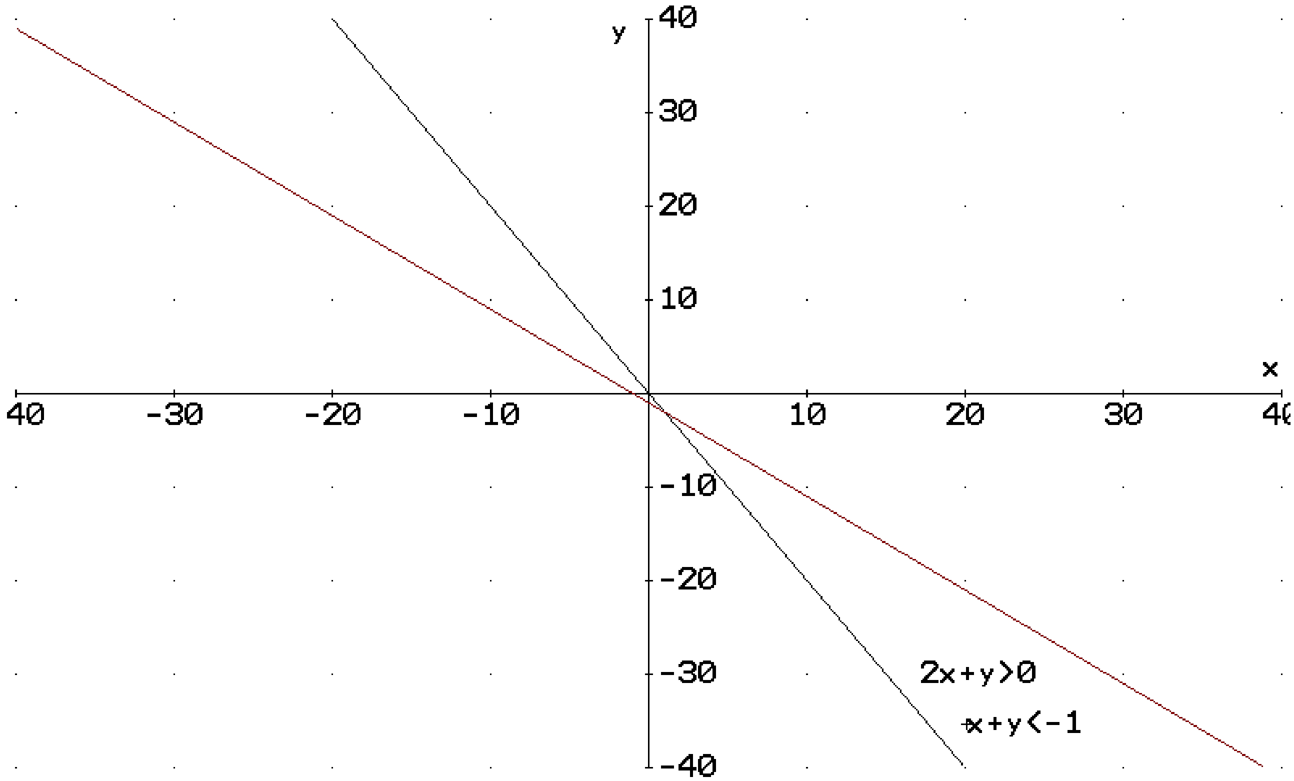
***Ejemplo 1**: Resolvemos el sistema de inecuaciones:* $\begin{cases} 3x - y - 2 > 0 \\ x + y < 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ *la solución es (1,1), que se correspondería con el punto de corte de las dos rectas. Si representas las dos rectas se delimitarán cuatro regiones en el plano:*



Ejemplo 2*: Resolvemos el sistema de inecuaciones:* $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ x + y < -1 \end{cases}$

Representamos en primer lugar ambas rectas. Una de ellas pasa por el origen de coordenadas. Puedes comprobar que el punto de corte es (1 , -2).
En segundo lugar buscaríamos la región del plano que verifica ambas condiciones (hay cuatro regiones). Para ello buscaríamos un punto que pertenezca a cada una de las 4 regiones y lo sustituiríamos en el sistema de inecuaciones. Observa el punto (7,-10).



- ***Ejercicios de inecuaciones y sistemas de inecuaciones I***

1. ***Resolver las siguientes inecuaciones***

a) $(x-2)^2 > (x+2)\cdot(x-2)+8$ — *R.* $(-\infty, 0)$

b) $(x-1)^2 < x(x-4)+8$ — *R.* $(-\infty, 7/2)$

c) $3-(x-6) \leq 4x-5$ — *R.* $[14/5, +\infty)$

d) $\frac{3x-5}{4} - \frac{x-6}{12} < 1$ — *R.* $(-\infty, 21/8)$

e) $1 - \frac{x-5}{9} < 9+x$ — *R.* $(-67/10, +\infty)$

f) $\frac{x+6}{3} - x + 6 \leq \frac{x}{15}$ — *R.* $[120/11, +\infty)$

2. ***Resolver cada una de las siguientes inecuaciones:***

a) $|2x-1| > 3$ — *R.* $IR - [-1, 2]$

b) $\left|3 - \frac{x}{2}\right| \leq 2$ — *R.* $[2, 10]$

c) $\left|\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right| \geq 5$ — *R.* $IR - [-45/2, 55/2]$

d) $\left|1 - \frac{x}{3}\right| < 1$ — *R.* $(0, 6)$

e) $|x-3| > -1$ — *R.* $(-\infty, +\infty)$

f) $/3 - 2x/ < 0$ R. $\varnothing$

g) $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| \le 1$ R. [- 2/3 , 4]

h) $/3 - 2x/ < x + 4$ R. (- 1/3 , 7)

i) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| > 2$ R. (1 , 2) $\cup$ (2 , 5)

j) $\left|\dfrac{3x+5}{x}\right| \ge 2$ R. (- ∞ , - 5] $\cup$ [-1 , 0) $\cup$ (0 , + ∞)

k) $\left|\dfrac{3x-1}{x+7}\right| < 3$ R. (- 10/3 , + ∞)

l) $\left|\dfrac{2x-1}{1+2x}\right| > 3$ R. (- 1 , -1/2) $\cup$ (-1/2 , -1/4)

m) $|2x+5| \ge x+4$ R. IR – (-3 , -1)

n) $\left|\dfrac{3x-5}{x-1}\right| \ge \dfrac{1}{2}$ R. (- ∞ , 1) $\cup$ (1 , 11/7] $\cup$ [9/5 , + ∞)

o) $\left|\dfrac{x-3}{5x}\right| < \dfrac{1}{3}$ R. IR - [-9/2 , 9/8]

3. Graficar en forma separada la región de solución de cada uno de los ejercicios siguientes.

1. - $y < x + 2$
2. - $x - y > -3$
3. - $2x – y > 1$
4. - $2 (5x – 1) – 4 (1 – x) > y$
5. - $(x – 8) (x – 7) – (x – 9) (x – 5) < y$
6. - $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y \le 1$
7. - $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y > 2$

4. Determinar la solución, en un sistema de coordenadas, de las siguientes inecuaciones:

a) $x – y \le 2$ b) $x + y \ge 3$ c) $2x + y < -2$ d) $2x – 3y < -1$

e) $y \ge x$ f) $x – y \le 5$ g) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y \le 1$ h) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y > 2$

5. Determinar la región solución del siguiente sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) $x + y \ge 2$
$x – y < 3$

- ## PARTE C

Elementos de Geometría Analítica

Rectas, Ángulos y Distancias

- ***Ecuación de la recta***

Se considera la recta que pasa por el punto S= (s_1; s_2) y tiene la dirección del vector v = (v_1,v_2)

Ecuación vectorial

SP = λ. V siendo P cualquier punto de la recta y λ ε R.

Ecuaciones parametricas

$x = s_1 + \lambda.v_1$
$y = s_2 + \lambda.v_2$

Ecuación general

$A.x + B.y + C = 0$

*Donde n= (A; B) es un **vector normal** a la recta, si además │n│= 1 la ecuación se llama **ecuación normal**.*

De la ecuación general de la recta se deduce la expresión
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ *con a = - C/ A y b= - C/B, que es la **ecuación segmentaria** o simétrica de la recta, cuya ventaja es que se observa explícitamente los puntos de intersección de la recta con ambos ejes coordenados .*

$A (x – x_0) + B . (y – y_0) = 0$ *es también la ecuación general siendo (x_0;y_0) un punto de la recta.*

En particular la ecuación $y – y_0 = m. (x – x_0)$ *es la **ecuación de la recta de pendiente m que pasa por (x_0; y_0).***

Siendo $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ *la **ecuación de la recta que pasa por dos puntos** (x_1; y_1) y (x_2; y_2)*

- ***Angulo entre rectas***

El ángulo θ entre dos rectas es el ángulo agudo entre los vectores u y v que determinan sus respectivas direcciones o es el ángulo entre n_1 y n_2, los dos vectores normales a cada una de ellas.(ver ángulo entre vectores) .

*Las rectas son **paralelas** si los vectores u y v son proporcionales y son **perpendiculares** si dichos vectores lo son. También decimos que las rectas son paralelas si sus* *pendientes son iguales y son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas.*

Si m_1 y m_2 son las pendientes de cada una de las rectas ,otra manera de calcular θ es a través de

$$tg\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$$

- ***Distancias***

Distancia entre dos puntos

Sean los puntos $A=(a_1 ;a_2)$ y $B = (b_1;b_2)$
La $d (A ; B)= \sqrt{(a_1 – b_1)^2 + (a_2 – b_2)^2}$

Distancia de un punto a una recta

Dados el punto $P=(x_0;y_0)$ y la recta $Ax + By + C = 0$

La distancia de P a la recta esta dada por

$$\left| \frac{A. x_0 + B. y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Para determinar la distancia entre rectas paralelas, se determina la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra recta.

<u>Actividades propuestas</u>

1.- Hallar las ecuaciones generales de las siguientes rectas

a) r_1: pasa por los puntos (3; 4) y (-1;2)
b) r_2: pasa por (1; 3) y es paralela a $2 x = 7 + 4 y$
c) r_3: tiene pendiente ½ y pasa por la intersección de las rectas $2 x + 3 y = 4$ y $5 x + 4 y = 3$
d) r_4: pasa por los puntos P y Q siendo P la intersección de $x + y = 2$ con $3 x – y = 1$, y Q la intersección de $3 x + 5 y = 1$ con $2 x + y = -1$.

2.- Se consideran las rectas

$$r = \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 – 2 \lambda \end{cases} \qquad s: a x + 3 y + b = 0$$

Hallar los valores de a y b para los cuales las rectas r y s son
a) paralelas
b) perpendiculares

3.- Hallar las rectas que forman un ángulo de 30º con la recta $y = x + 5$ y que pasan por el punto (1; 2) .

4.- Hallar los puntos de la recta $x – 2 y = 0$ que están a doble distancia de (6;8) que de (3 , -1) .

5.- Si dos vértices de un triangulo equilátero son (-3;2) y (1;2), encontrar el *tercer vértice.*

6.- Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos (x;y) tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a (-2;-1) y (0;3) es 16.
(Nota: llamamos lugar geométrico determinado por una ecuación al conjunto de puntos que satisfacen dicha ecuación)

7.- Dado el triangulo de vértices (1;7); (-3;0) y (6;-2), encontrar la distancia de cada uno de los vértices al lado opuesto del triangulo.

8.- Determinar si las rectas $2x + y - 11 = 0$ y $4x + 2y - 3 = 0$ son paralelas, en caso afirmativo hallar la distancia entre ellas.

9.- Sean los puntos A= (-2,6), B= (1; 6) y C= (-2; 3) los vértices de un triangulo isósceles.
a) Probar que el punto D= (-1; 4) esta sobre la recta BC.
b) Probar que la suma de las distancias de D a los lados del triángulo es igual a la distancia de C a la recta AB.

Triángulos

Propiedades fundamentales:

- *Altura: recta que pasa por el vértice y es perpendicular al lado opuesto.*
- *Mediana: recta que pasa por el vértice y por el punto medio del lado opuesto*
- *Mediatriz: recta perpendicular a cada lado en su punto medio.*
- *Bisectriz de un ángulo: recta que pasa por el vértice de cada ángulo del triangulo y lo divide en dos partes iguales.*

Los puntos en los que se cortan las alturas, las medianas y las mediatrices de un triangulo están alineados.

- ***Área de un triangulo**:*

Todos conocemos la tradicional formula para calcular el área de un triangulo

$$\text{Área} = \frac{\text{Base x altura}}{2}$$

Pero muchas veces nos enfrentamos con el problema de no conocer la altura. Enunciamos entonces otras formas de calcular el área de un triangulo.

Área = ½ b.c .sen A
siendo b y c dos lados del triangulo y A el ángulo entre ellos.

Área = √ p. (p-a).(p-b).(p-c) (Formula de Heron)
Siendo a, b y c los lados del triangulo y p el semiperimetro.

Actividades propuestas

1.- Dado el triangulo de vértices A= (1;-1); B = (5;-1) C = (3;5) determinar la ecuación de la recta que contiene a los puntos de intersección de las alturas, de las medianas y de las mediatrices.

2.-Encontrar el área de cada uno de los siguientes triángulos utilizando la *formula que resulta más conveniente.*

a) *dos de sus lados miden 3 y 4 cm respectivamente y el ángulo entre ellos es de 30º*
b) *sus lados miden 5, 12 y 13 cm respectivamente.*
c) *Los vértices son (4,1),(-2,4),y (6,3)*
d) *Sus lados están sobre las rectas $x- y + 7=0$, $4x + y + 3=0$, $x +4y-3=0$*

<u>Circunferencia</u>

- ***Ecuación general de la circunferencia***

  $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$
  siendo (a;b) el centro de la circunferencia y r su radio.

  Si desarrollamos la ecuación anterior llegamos a la expresión

  $x^2 + y^2 + Dx +Ey + F =0$

- ***Posiciones relativas de una recta y una circunferencia***

  *Una recta es **secante** a una circunferencia si dista de su centro menos que r (radio), es **tangente** si su distancia al centro es igual a r y es **exterior** en caso de que su distancia al centro sea mayor a r*

  La recta tangente es perpendicular al radio en su punto de tangencia $(x_0;y_0)$ y su ecuación esta dada por
  $(x_0 – a).(x – x_0).+ (y_0 – b).(y – y_0) = 0$

  <u>Actividades propuestas</u>

1.- Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene el mismo centro y cuyo radio es la mitad de la circunferencia
$9 x^2 + 9 y^2 – 6 x + 18 y = 26$

2.- Hallar las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4 x – 6 y + 12 =0$ desde el punto (5;7).

3.- Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 + 6 x – 4 y - 51 =0$ y $x^2 + y^2 - 10 x + 14 y + 49 =0$, encontrar la ecuación de la recta que une sus centros.

4.- Dadas las circunferencias $x^2 + y^2 + 2 x – 4 y - 8 =0$ y $x^2 + y^2 - 2 x -6 y -10 =0$,
a) *encontrar sus puntos de intersección*
b) *hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos encontrados en a)*
c) *hallar la ecuación de la recta que une los centros de las circunferencias.*
d) *¿Cómo son las rectas encontradas?*

5.- Determinar la posición de la recta $7 x – 9 y + 25 = 0$ y la circunferencia
$x^2 + y^2 +18 x - 6 y +25 =0$

6.- Determinar la ecuación de la circunferencia de centro (-2;-1) que pasa por el (1;3).

7.- Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia

$x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$ en los puntos (4;-8) y (2;6)

Cónicas

- ***Ecuación general***

  Toda cónica tiene por ecuación general la expresión

  $A.x^2 + B.x.y + C.y^2 + D.x + E.y + F = 0$

  La expresión $\Delta = B^2 - 4. A.C$ *se llama* ***discriminante.***

  Si $\Delta < 0$ *la cónica es una* ***elipse.***
  $\Delta > 0$ *es una* ***hipérbola***
  $\Delta = 0$ *es una* ***parábola****.*

- ***Elipse***

  *Es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos F(c,O) y F ' (-c,O);****focos*** *tiene suma constante.*
  2 a > F F'
  Dado P un punto de la elipse PF + PF' = 2a
  La ***ecuación*** *de la elipse centrada en el origen de coordenadas esta dada por :*

  $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

  Siendo $a^2 = b^2 + c^2$
  y $2c = F F'$

  Las rectas A A' y B B' se llaman ***ejes****; c es la* ***semidistancia focal****, a y b son los* ***semiejes****; O es el* ***centro*** *.*
  Se llama ***excentricidad*** *a* $e = c/a < 1$

- ***Hipérbola***

  *Es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos F(c,O) y F ' (-c,O);****focos*** *tiene diferencia constante.*
  2 a < F F'
  Dado P un punto de la elipse PF - PF' = +/- 2a
  La ***ecuación*** *de la hipérbola centrada en el origen de coordenadas esta dada por :*

  $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

  Siendo $a^2 + b^2 = c^2$
  y $2c = F F'$

  Las rectas A A' y su perpendicular por O son los ***ejes****; c es la* ***semidistancia focal****, a y b son los* ***semiejes****; O es el* ***centro*** *.*
  Se llama ***excentricidad*** *a* $e = c/a > 1$

- ***Parábola***

*La **parábola** de **foco** F(p/2,O) y **directriz** r es el lugar geométrico de los puntos P tales que d(P, F)=d(P, r)*
Su ecuación reducida es $y^2 = 2px$
*Siendo p = d(F, r) el **parámetro** de la parábola.*
*La perpendicular a r desde P es el **eje** y su **excentricidad** e= 1.*

Actividades propuestas

1.- Se considera la elipse que tiene por ecuación a $4x^2 + 3y^2 = 12$
Hallar los semiejes, los focos y la excentricidad

2.- Se consideran las siguientes parábolas
a) $2y^2=9x$
b) $y = 6x^2$
c) $(y - 1)^2 = 6(x + 2)$
d) $y = 2x^2 + 1$
Hallar sus elementos: foco, parámetro, directriz y vértice

3.- Hallar los elementos: semiejes, focos y excentricidad de cada una de las siguientes elipses:

a) $x^2/9 + y^2/4 = 1$
b) $x^2 + 25y^2 = 1$
c) $(x - 1)^2 + 25(y + 2)^2 = 25$